На правах рукописи

АВРАШКОВ

ПАВЕЛ ПЕТРОВИЧ

УДК 517.9

АЛГОРИТМЫ СИММЕТРИЙНОГО АНАЛИЗА ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

01.01.02. – ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Казань – 2004

Работа выполнена на кафедре высшей математики
Орловского государственного технического университета.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор **Зайцев Валентин Фёдорович**

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор **Чугунов Владимир Аркадьевич**,

доктор физико-математических наук,
профессор **Титов Сергей Сергеевич**

Ведущая организация – Казанский государственный технический университет им. А.Н. Туполева

Защита состоится 9 июня 2004 г. в 17^{00} часов на заседании диссертационного совета К 212.081.06 по присуждению ученой степени кандидата физико-математических наук при Казанском государственном университете по адресу: 420008, г. Казань, ул. Университетская, 17, НИИММ, ауд. 324.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского Казанского государственного университета.

Автореферат разослан “___“ мая 2004 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
к.ф-м.н., доцент Липачев Е.К.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Для современного этапа развития науки характерно стремление к всестороннему исследованию изучаемых объектов с целью получения о них наиболее полной информации. При этом особое значение имеют внутренние свойства, заложенные в самой природе объекта, и, следовательно, влияющие на его поведение.

К таким фундаментальным свойствам относится и симметрия, поскольку она в той или иной степени присуща практически всем объектам и явлениям. Многообразие ее форм дает возможность применять симметрийный принцип в различных отраслях науки, в том числе и в теории дифференциальных уравнений (ДУ). Использование симметрийного подхода в теории ДУ позволяет значительно разнообразить и дополнить существующий набор традиционных методов исследования ДУ и, тем самым, получать о них качественно новую информацию, что особенно важно для тех из них, которые не имеют регулярных методов решения.

В работе рассматриваются ОДУ 3-го порядка. Давно замечено, что такие уравнения, имея нечетный порядок, по своим свойствам (в том числе и симметрийным) существенно отличаются от уравнений четного порядка. В частности, уравнения нечетных порядков не позволяют выделить гамильтоновые структуры и, насколько известно, попытки расширения для них понятия гамильтоновости не привели к осязаемым результатам.

Исследования последних лет еще более подтвердили эти особенности. Так, например, исследование первых интегралов для ОДУ 3-го порядка значительно более трудоемко, чем для уравнений четного порядка. И вообще, уравнения нечетных порядков заметно беднее симметриями, чем уравнения четных порядков. В то же время уравнения нечетных порядков весьма актуальны в приложениях (достаточно вспомнить, что именно к ним сводятся так называемые уравнения пограничного слоя).

К настоящему времени эффективность прямых методов классического группового анализа (теория Ли) оказывается недостаточной для решения ряда прикладных задач. Вместе с тем, растущий интерес к прогнозированию результатов исследования, а также существующая проблема классификации и систематизации изучаемых объектов и их свойств требуют нового подхода к самой постановке задач. Поэтому возникла потребность в алгоритмах, позволяющих найти все ДУ выбранного класса, априорно обладающие некоторой симметрией заданного вида (*обратная задача* группового анализа), причём наряду с точечными симметриями представляют интерес их нелокальные аналоги, в частности, нелокальные симметрии экспоненциального типа. При этом оказывается, что для довольно широких классов уравнений обратная задача решается в общем виде полностью, давая нам одновременно и решение прямой задачи (так как она в ней содержится) и обширные классы моделей, которые можно просто строить по наличию априорной симметрии.

Актуальна постановка обратной задачи и при поиске законов сохранения, поскольку не существует общих приёмов нахождения первых интегралов, в том числе и для уравнений нечётного порядка. Поэтому и здесь разработка регулярных методов описания классов уравнений, обладающих первыми интегралами заданной структуры, представляется весьма важной задачей. Существенным является также исследование взаимодействия инфинитезимальных операторов и законов сохранения, так как в тех случаях, когда первый интеграл “наследует” точечную симметрию, порядок ОДУ может быть понижен сразу на 2 единицы. (В этом случае мы имеем некоторый аналог вариационной симметрии).

Что касается уравнений 3-го порядка, то они (помимо всего прочего) могут быть хорошим модельным примером группового анализа уравнений нечетных порядков — в отличие от уравнений 1-го порядка, которые столь специфичны, что требуют особого подхода.

Цели и задачи работы. Целью исследования является современный групповой анализ ОДУ 3-го порядка. Поэтому в работе ставятся и решаются следующие **задачи**:

1. Разработка алгоритмов решения обратной задачи группового анализа для точечных операторов и экспоненциальных нелокальных операторов (ЭНО).
2. Поиск уравнений 3-го порядка, допускающих классические симметрии Ли (обратная задача группового анализа) и ЭНО.
3. Разработка алгоритмов поиска первых интегралов для ОДУ 3-го порядка определённой структуры (прямая задача) и поиска уравнений с первыми интегралами заданной структуры (обратная задача).
4. Поиск ОДУ 3-го порядка, обладающих первыми интегралами некоторой заданной структуры.
5. Исследование взаимодействия лиевских симметрий и первых интегралов.

Методика исследования. В работе применяются основные методы современного группового анализа, основанные на совместном применении теории ОДУ и общей алгебры (теория непрерывных групп преобразований).

Научная новизна. Все полученные результаты являются новыми.

На защиту выносятся следующие результаты:

1. Доказательство необходимых и достаточных условий существования лиевских симметрий и ЭНО, допускаемых ОДУ 3-го порядка.
2. Полное решение обратной задачи группового анализа для уравнений 3-го порядка без предстаршей производной, допускающих 1– и 2–мерную алгебру Ли L_1 и L_2.
3. Полное решение обратной задачи группового анализа для уравнений 3-го порядка, обладающих линейными и квадратичными по y'' первыми интегралами.
4. Алгоритм поиска первых интегралов, квадратичных по y'', для ОДУ 3-го порядка с правой частью, известным образом зависящей от y''.
5. Доказательство необходимых и достаточных условий существования перво-

го интеграла при наличии точечной симметрии для уравнений вида $y''' = f(x, y)$. В частности, доказано, что существует только 24 подкласса нелинейных уравнений (без промежуточных производных), одновременно обладающих квадратичными по y'' первыми интегралами и допускающих точечную симметрию с оператором $X = r\partial_x + (r' + \alpha)y\partial_y$ $(r \neq 0)$. Среди нелинейных уравнений с указанным свойством выделены все уравнения, первые интегралы которых „наследуют“ точечную симметрию, допускаемую самим уравнением.

6. Полное решение обратной задачи группового анализа уравнений вида $y''' = f(x, y, y')$, допускающих ЭНО вида $\hat{X} = \eta(x, y, y')e^{\int \zeta(x, y, y')\,dx}\partial_y$.

Теоретическая и практическая ценность. Полученные в диссертации результаты имеют как теоретическое, так и практическое значение. Проведён симметрийный анализ ОДУ 3-го порядка, доказаны основополагающие теоремы о взаимодействии симметрий (теоретический аспект). Выявлены структуры ОДУ 3-го порядка (без предстаршей производной), допускающих понижение порядка с помощью точечных преобразований за счёт допускаемой алгебры Ли соответствующей размерности или имеющихся первых интегралов, найдены новые интегрируемые уравнения, встречающиеся в приложениях (прикладной аспект).

Апробация работы. Основные материалы диссертации по мере их получения докладывались и обсуждались на:

- научных семинарах кафедры высшей математики Орёл ГТУ;
- ежегодных конференциях ”Герценовские чтения“, С.-Петербург, 1994–99;
- Международной конференции ”Алгебраические и аналитические методы в теории дифференциальных уравнений“, Орёл, 1996;
- Международной конференции ”Средства математического моделирования“, С.-Петербург, 1997.

Публикации. По теме диссертации имеется 6 публикаций [1–6]. В публикациях [1, 4, 6], сделанных в соавторстве, научному руководителю (соавтору) принадлежит постановка задач.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы, содержащего 66 наименований, и 1 приложения. Материал изложен на 109 страницах, включая 7 таблиц.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** кратко обосновывается актуальность темы исследования, излагается постановка задачи, определяется цель и задачи исследования, вводятся основные понятия, определения теории непрерывных групп и первых интегралов. Определяются понятие дифференцируемого многообразия (позволяющее всякое ОДУ n-го порядка рассматривать как $(n+2)$-мерное многообразие в продолженном пространстве) и инфинитезимальный оператор, соответствующий точечной однопараметрической локальной группе, а также понятие экспоненциального нелокального оператора. Формулируется алгоритм решения прямой задачи классического группового анализа (теория Ли).

Определение 8 . Пусть $V \subset \mathbf{R}^2$ — открытое множество. Линейный дифференциальный оператор

$$\mathrm{X} = \xi(x, y)\partial_x + \eta(x, y)\partial_y, \tag{0.4}$$

действующий на дифференцируемое отображение F: $V \to \mathbf{R}^2$ по формуле

$$\mathrm{X}[F] = \xi(x, y)\frac{\partial F}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial F}{\partial y} \equiv \xi F_x + \eta F_y, \tag{0.5}$$

называется *инфинитезимальным оператором* группы Ли о (или, кратко, *оператором группы*).

Определение 17. *Первый интеграл* ОДУ — отличная от постоянной и непрерывно дифференцируемая функция, (полная) производная которой вдоль решений данного уравнения тождественно равна нулю.

Определения, носящие частный характер и необходимые для освещения конкретного материала, приводятся в соответствующих главах.

Первая глава посвящена лиевским симметриям ОДУ 3-го порядка без предстаршей производной и состоит из двух параграфов. В **§ 1** рассматривается обратная задача группового анализа — поиск уравнений, априори допускающих некоторую точечную симметрию. Для уравнений указанного класса конструктивно (решением определяющего уравнения относительно функции f) доказана основополагающая

Теорема 1.1. Уравнение вида $y''' = f(x, y, y')$ допускает однопараметрическую группу Ли о, если и только если её оператор имеет вид

$$\mathrm{X} = r(x)\partial_x + [(r'(x) + a)y + b(x)]\partial_y, \tag{1.9}$$

а функция f

а) при $r(x) \not\equiv 0$ имеет вид $f = r^{-2}E\cdot[\Phi(u,w) + w\Delta + r^2 r''' u + (a^3 + a\Delta + r^2 r''')V] + \Phi_0$, где $r(x)$ и $b(x)$ — произвольные функции, a — произвольная постоянная, $\Phi(u,w)$ — произвольная функция своих аргументов, $E = E(x) \equiv e^{a\int r^{-1}dx}$, $V = V(x) \equiv \int r^{-2} b E^{-1} dx$, $u = r^{-1}E^{-1}y - V$, $w = E^{-1}(y' - r' r^{-1} y - r^{-1} b) - aV$, $\Delta(x) \equiv 2rr'' - r'^2$, $\Phi_0(x) \equiv (r''b - r'b' + rb'')r^{-2} + a(rb' - r'b + ab)r^{-3}$;

б) при $r(x) \equiv 0$ и $a \neq 0$ имеет вид $f \equiv \Phi\left(x, \frac{ay' + b'}{ay + b}\right)(ay + b) - \frac{b'''}{a}$;

в) при $r(x) \equiv 0$ и $a = 0$ имеет вид $f \equiv \Phi\left(x, y' - \frac{b'}{b}y\right) + \frac{b'''}{b}y$.

В **§ 2** рассматривается вопрос о структуре уравнений, допускающих двумерную алгебру Ли точечных преобразований. В соответствии с теоремой 1.1 поставленный вопрос решался отдельно для каждого из трех существующих подклассов уравнений рассматриваемого класса. Доказанные в § 2 теоремы 2.1–2.3 (и следствия из них) показывают, что в классе уравнений 3-го порядка без предстаршей производной, разрешимых относительно y''', существует только 15 подклассов уравнений, допускающих понижение порядка на 2 единицы за счёт допускаемой 2-мерной алгебры Ли L_2.

Теорема 2.1. Уравнение (2.1) $\dddot{u} + 3a\ddot{u} + 3a^2\dot{u} + a^3 u = \Phi(u, \dot{u} + au)$ допускает 2-мерную алгебру Ли с операторами $\mathrm{T}_1 = \partial_t$ и

$$\mathrm{T}_2 = \rho(t)\partial_t + \left[(A_0 + \dot{\rho} - a\rho)u + \beta(t)\right]\partial_u, \tag{2.2}$$

если и только если функция $\Phi(u, \dot{u})$ имеет одну из 9 форм, представленных в таблице 1 (см. страницу 8).

Следствие (из теоремы 2.2): Уравнение $y''' = y\Phi\left(x, \frac{y'}{y}\right)$ допускает 2-мерную алгебру Ли с операторами $\mathrm{X}_1 = y\partial_y$ и $\mathrm{X}_2 = \varphi(x)\partial_x + [\varphi' y + \rho(x)]\partial_y$ (где φ и ρ — произвольные функции), если и только если это уравнение имеет одну из 3-х форм:

1) если $\varphi(x) \equiv 0$ и $\rho(x) \equiv \mathrm{const} \neq 0$, то $y''' = y'\Psi(x)$;

2) если $\varphi(x) \equiv 0$ и $\rho(x) \not\equiv \mathrm{const}$, то $y''' = \dfrac{\rho'''}{\rho'} y' + (\rho' y - \rho y')\Psi(x)$;

3) если $\varphi(x) \not\equiv 0$, то $\rho(x) \equiv 0$, а $y''' = y\varphi^{-3}[\Psi(w) + \varphi'''\varphi^2 + (2\varphi''\varphi - \varphi'^2)w]$, где инвариант $w = \varphi y' y^{-1} - \varphi'$.

Следствие (из теоремы 2.3): Среди уравнений класса $y''' = \Phi\left(x, y' - \frac{b'}{b}y\right) + \frac{b'''}{b}y$ три (и только 3) подкласса допускают 2-мерную алгебру Ли с операторами $\mathrm{X}_1 = b(x)\partial_y$ и $\mathrm{X}_2 = \left[C_2 + (C_1 - C)\int b^{-1}dx\right]b(x)\partial_x + \left\{Cy + bh + \left[C_2 + (C_1 - C)\int b^{-1}dx\right]bb'\right\}\partial_y$:

а) если $C_1 = C$, $C_2 = 0$ и $h(x) \equiv \mathrm{const} \neq 0$, то $C \neq 0$, а $y''' = \left(y' - \frac{b'}{b}y\right)\Psi(x) + \frac{b'''}{b}y$;

б) если $C_1 = C$, $C_2 = 0$ и $h(x) \not\equiv \mathrm{const}$, то

$$y''' = \frac{f_1}{h'}\left(y' - \frac{b'}{b}y\right) - \left[C\cdot\left(y' - \frac{b'}{b}y\right) + bh'\right]\Psi(x) + \frac{b'''}{b}y; \tag{2.61}$$

(в этом случае $\mathrm{X}_2 = (Cy + bh)\partial_y$);

в) если $|C_1 - C| + |C_2| \neq 0$, то

$$y''' = \frac{b'''}{b}y - bg^{-3}\varepsilon^{-1}\left[\Psi(w) + w\int f_2 g\,dx - \int\left(f_1 g^2\varepsilon - f_2 g\int h'\varepsilon\,dx\right)dx\right], \tag{2.62}$$

где функции Ψ, $b(x)$, $h(x)$ и постоянная C — произвольны, инвариант $w = \left(y' - \frac{b'}{b}y\right)\dfrac{g}{b}\varepsilon - \int h'\varepsilon\,dx$, а функции g, f_1, f_2 и ε определяются формулами:

$$g = b(x)\left[C_2 + (C_1 - C)\int b^{-1}dx\right], \qquad f_1 = h''' + 3\frac{b'}{b}h'' + 3\frac{b''}{b}h',$$

$$f_2 = g''' + 3\frac{b'}{b}g'' - 6\frac{b''}{b}g' - 3\left(\frac{b''}{b}\right)' g, \qquad \varepsilon = \varepsilon(x) \equiv e^{-C_1\int g^{-1}dx}.$$

<u>**Вторая глава**</u>, состоящая из трёх параграфов, посвящена первым интегралам ОДУ 3-го порядка и их взаимодействию с точечными симметриями.

В **§ 3** формулируется алгоритм решения обратной задачи поиска первых интегралов, полиномиально зависящих от y''. Его применение позволило полностью выявить структуру уравнений, обладающих линейными и квадратичными по y'' первыми интегралами. (С помощью применённого алгоритма могут быть найдены структуры уравнений, обладающих первыми интегралами полино-

миальной структуры более высоких степеней, однако трудоёмкость их поиска быстро растёт с ростом степени полинома).

Теорема 3.1. ОДУ 3-го порядка вида $y''' = f(x, y, y', y'')$ обладает *линейным* по y'' первым интегралом $P(x, y, y', y'') = Q(x, y, y')y'' + R(x, y, y')$, если и только если функция f является полиномом не выше 2-й степени по y'' следующего вида:

$$f(x, y, y', y'') \equiv -\frac{Q_{y'}}{Q} y''^2 - \frac{Q_x + Q_y y' + R_{y'}}{Q} y'' - \frac{R_x + R_y y'}{Q}.$$

Теорема 3.2. ОДУ 3-го порядка без предстаршей производной вида $y''' = f(x, y, y')$ обладает *линейным* по y'' первым интегралом, если и только если $Q = Q(x,y)$, $R = U - Q_x y' - \frac{1}{2} Q_y y'^2$, а функция f является полиномом не выше 3-й степени по y' следующего вида:

$$f(x, y, y') \equiv \frac{Q_{yy}}{2Q} y'^3 + \frac{3Q_{xy}}{2Q} y'^2 + \frac{Q_{xx} - U_y}{Q} y' - \frac{U_x}{Q}$$

(где $Q(x,y)$ и $U = U(x,y)$ — произвольные функции указанных аргументов).

Теорема 3.3. ОДУ 3-го порядка без промежуточных производных вида $y''' = f(x, y)$ обладает *линейным* по y'' первым интегралом, если и только если $Q = Ay + b(x)$, $R = c + b'' y - b' y' - \frac{A}{2} y'^2$, а функция f дробно-линейна по y и имеет вид:

$$f(x, y) \equiv -\frac{b''' y + c'}{Ay + b},$$

где A — произвольная постоянная, а $b(x)$ и $c(x)$ — произвольные функции.

Теоремы 3.1–3.3 полностью исчерпывают вопрос об ОДУ 3-го порядка, разрешённых относительно старшей производной и обладающих линейными по y'' первыми интегралами.

Далее, в лемме 3.1 и теоремах 3.4–3.11 выясняется структура уравнений, обладающих квадратичными по y'' первыми интегралами. В частности, для уравнений без промежуточных производных справедлива

Теорема 3.11. Уравнение $y''' = f(x, y)$ имеет квадратичный по y'' первый интеграл

$$P = Q(x, y, y')y''^2 + R(x, y, y')y'' + S(x, y, y'), \tag{3.7}$$

если и только если $Q = Ay^2 + b(x)y + c(x)$, $R = U - Q_x y' - \frac{1}{2} Q_y y'^2$,

$$S \equiv H(x, y) - (U_x + 2Qf) y' + \tfrac{1}{2}(Q_{xx} - U_y) y'^2 + \tfrac{1}{2} Q_{xy} y'^3 + \tfrac{1}{8} Q_{yy} y'^4,$$

где A — произвольная постоянная, $b(x)$ и $c(x)$ — произвольные функции, $U(x,y) = u_0(x) + u_1(x)y + b''y^2$ и вместе с $H(x,y)$ удовлетворяет системе:

$$\begin{cases} H_y = U_{xx} + 3Q_x f + 2Qf_x, \\ H_x + Uf = 0, \end{cases} \tag{3.18}$$

а функция $f(x,y)$ имеет вид

$$f \equiv Q^{-5/4}\left[g(x) + \tfrac{c''' - 3u_1'}{4}\int Q^{1/4}dy - \tfrac{5b'''}{4}\int yQ^{1/4}dy\right].$$

Из теоремы 3.11 вытекает следующий алгоритм поиска уравнений вида $y''' = f(x, y)$, имеющих квадратичный по y'' первый интеграл (3.7):

1). Задаём функции b и c, определив тем самым функции Q и U;

2). Если известна структура функции f по переменной y, то из 1-го уравнения системы (3.18) находим
$$H_y = U_{xx} + 3Q_x f + 2Qf_x \tag{3.22}$$
(если известна структура функции f по переменной x, то из 2-го уравнения системы (3.18) находим $H_x = -Uf$);

3). Интегрируя полученное выражение по соответствующей переменной, находим функцию H;

4). Подставляя найденную функцию в другое уравнение, расщепляем его по соответствующей переменной и получаем систему для определения функций $u_k(x)$ и конкретизации функции f.

С помощью этого алгоритма в **§ 4** проводится исследование уравнений без промежуточных производных на совместное наличие точечной симметрии и первых интегралов, квадратичных по y''.

Теорема 4.1. При $r(x)$ □0 среди нетривиальных уравнений класса
$$y''' = f(x, y), \tag{4.1}$$
допускающих группу Ли с оператором
$$\mathrm{X} = r\partial_x + (r' + \alpha)y\partial_y \tag{4.19}$$
и имеющих первый интеграл (3.7), в котором $Q = Ay^2$, существует 2 и только 2 подкласса — уравнения вида $y''' = \lambda r^{-1}E^{2}y^{-1}$ и $y''' = \lambda r^{1/2}E^{7/2}y^{-5/2}$, причём первый из них содержит 8 типов уравнений, а второй — 3 типа уравнений.

Теорема 4.2. При $r(x)$ □0 среди нетривиальных уравнений класса (4.1), допускающих группу Ли с оператором (4.19) и имеющих первый интеграл (3.7), в котором $Q = y^2 + D(x)$, существует 2 и только 2 семейства уравнений — уравнения вида $y''' = k_1\sqrt{C_1}\,x(k_2^{\,2}y^2 + C_1^{\,2}x^4)^{-5/4}$, имеющие первый интеграл
$$P = \left(yy'' - \tfrac{1}{2}y'^2\right)^2 + k_2^{-2}\left[C_1^{\,2}(2y - 2xy' + x^2y'')^2 + 2k_1\sqrt{C_1}(2y - xy')(k_2^{\,2}y^2 + C_1^{\,2}x^4)^{-1/4}\right]$$
и допускающие лиевский оператор $\mathrm{X} = x^2\partial_x + 2xy\partial_y$,
и уравнения вида $y''' = k_1(k_2^{\,2}y^2 + 1)^{-5/4}$, имеющие первый интеграл $P = \left(yy'' - \tfrac{1}{2}y'^2\right)^2 + k_2^{-2}\left[y''^2 - 2k_1(k_2^{\,2}y^2 + 1)^{-1/4}y'\right]$ и допускающие лиевский оператор $\mathrm{X} = \partial_x$ (здесь и далее: k_1, k_2, C_1 — произвольные ненулевые постоянные).

Теорема 4.3. При $r(x)$ □0 среди нелинейных уравнений класса (4.1), допускающих группу Ли с оператором (4.19) и имеющих первый интеграл (3.7), в котором $Q = b(x)y$, существует 2 и только 2 подкласса — уравнения вида
$$y''' = k_1\sigma(x)y^{-5/4}, \tag{4.55}$$
имеющие первый интеграл

$$P = (b''y - b'y' + by'')\left(y''y - \tfrac{1}{2}y'^2\right) + k_1\left[\tfrac{4}{3}(3b'\sigma + 2b\sigma')y^{3/4} - 2b\sigma y^{-1/4}y'\right] \quad (4.56)$$

(в котором $b''' = 0$, а $\sigma(x) \equiv E^{9/4}r^{-3/4}$), и уравнения вида

$$y''' = k_1\sigma(x)y^{-5/4} - k_2 r^{-3}y, \quad (4.57)$$

причём первый подкласс содержит 7 типов уравнений (собранных в таблице 4*)), а второй — 4 типа уравнений, два из которых имеют вид

$$y''' = k_1 x^{-9\gamma/2}r^{3(3\gamma-1)/4}y^{-5/4} + \tfrac{4}{63}\gamma\delta^3 r^{-3}y, \quad (4.58)$$

обладают первым интегралом

$$P = byy''^2 + \left(b''y^2 - b'yy' - \tfrac{1}{2}by'^2\right)y'' - \tfrac{1}{2}b''yy'^2 + \tfrac{1}{2}b'y'^3 -$$
$$-\tfrac{4}{63}\gamma\delta^3 x^{2\gamma}r^{-\gamma-3}y^2\left[ry' - (r' + 2\gamma\delta)y\right] + k_1 x^{-5\gamma/2}r^{3(3\gamma-1)/4}\left[(r' - \gamma\delta)y - ry'\right]y^{-1/4}$$

и допускают точечный оператор

$$\mathrm{X} = r(x)\partial_x + (r' - \gamma\delta)y\partial_y,$$

а два других имеют вид

$$y''' = k_1 x^{-\gamma/2}r^{(\gamma-3)/4}y^{-5/4} + \tfrac{4}{63}\gamma\delta^3 r^{-3}y, \quad (4.60)$$

обладают первым интегралом

$$P = byy''^2 + \left(b''y^2 - b'yy' - \tfrac{1}{2}by'^2\right)y'' - \tfrac{1}{2}b''yy'^2 + \tfrac{1}{2}b'y'^3 -$$
$$-\tfrac{4}{63}\gamma\delta^3 x^{2\gamma}r^{-\gamma-3}y^2\left[ry' - (r' + 2\gamma\delta)y\right] + k_1 x^{3\gamma/2}r^{-3(\gamma+1)/4}\left[\tfrac{2}{3}(3r' + 5\gamma\delta)y - 2ry'\right]y^{-1/4}$$

и допускают точечный оператор $\mathrm{X} = 9r(x)\partial_x + (9r' - \gamma\delta)y\partial_y$ (здесь $r(x) = C_1x^2 + \delta x$, $\delta \neq 0$, $\gamma = \pm\sqrt{3/7}$, $b(x) = x^{2\gamma}r^{1-\gamma}$).

Теорема 4.4. При $r(x)$ □ 0 уравнения класса (4.1) допускают группу Ли с оператором (4.19) и имеют первый интеграл (3.7), в котором $Q = c(x)$, если и только если эти уравнения являются линейными вида $y''' = kr^{-3}y + \chi(x)$.

Теоремы 4.1–4.4 исчерпывающим образом выделяют в классе уравнений без промежуточных производных 24 подкласса нелинейных уравнений, допускающих точечную симметрию и обладающих квадратичными по y'' первыми интегралами.

В **§ 5** рассматривается вопрос о нелинейных уравнениях без промежуточных производных, первые интегралы которых (квадратичные по y''), допускают те же точечные операторы, что и исходное уравнение.

Предварительно доказывается, что (с точностью до группы эквивалентности) нелинейные ОДУ вида $y''' = f(x, y)$, обладающие квадратичными по y'' первыми интегралами (3.7), допускают точечную симметрию с оператором (0.6), если и только если этот оператор имеет вид

$$\mathrm{X} = r(x)\partial_x + (r' + \alpha)y\partial_y, \quad (5.1)$$

где функция r либо имеет вид $r(x) \equiv C_1x^2 + \delta x$, либо $r(x) \equiv 1$ и, следовательно,

*) Таблица 4 помещена в диссертации и не приводится здесь из-за чрезмерного объёма.

удовлетворяет условию $r''' = 0$.

Затем, в леммах 5.1 и 5.2 формулируются необходимые и достаточные условия, при которых указанные первые интегралы нелинейных уравнений класса $y''' = f(x, y)$ „наследуют“ точечную симметрию, допускаемую самим уравнением. Далее, применением леммы 5.2 к выявленным в § 4 подклассам уравнений, в теоремах 5.1–5.4 выделяются 10 подклассов уравнений, первые интегралы которых „наследуют“ точечную симметрию самого уравнения.

В частности, в теореме 5.1 доказывается, что только для 4-х видов уравнений класса $y''' = \lambda r^{-1}E^{2}y^{-1}$ первые интегралы наследуют группу Ли с оператором (5.1) (в котором $\alpha \neq 0$), причем все квадратичные первые интегралы являются точными квадратами линейных (см. теорему 4.1). Они приведены в таблице 5.

Таблица 5

Уравнение	Первый интеграл P	Наследуемый оператор X
$y'''=\lambda e^{2\alpha x}y^{-1}$	$\left(yy''-\frac{1}{2}y'^{2}-\frac{\lambda}{2\alpha}e^{2\alpha x}+C_0\right)^{2}$	$\partial_x+\alpha y\partial_y$
$y'''=\lambda x^{2\gamma-1}y^{-1}$	$\left(yy''-\frac{1}{2}y'^{2}-\frac{\lambda}{2\gamma}x^{2\gamma}+C_0\right)^{2}$	$x\partial_x+(1+\gamma)y\partial_y$
$y'''=\lambda e^{-2\alpha/x}x^{-2}y^{-1}$	$\left(yy''-\frac{1}{2}y'^{2}-\frac{\lambda}{2\alpha}e^{-2\alpha/x}+C_0\right)^{2}$	$x^{2}\partial_x+(2x+\alpha)y\partial_y$
$y'''=\dfrac{\lambda x^{2\gamma-1}}{(C_1x+\delta)^{2\gamma+1}y}$	$\left(yy''-\frac{1}{2}y'^{2}-\frac{\lambda}{2\gamma\delta}\frac{x^{2\gamma}}{(C_1x+\delta)^{2\gamma}}+C_0\right)^{2}$	$(C_1x^{2}+\delta x)\partial_x+$ $+(2C_1x+\delta+\delta\gamma)y\partial_y$

Теорема 5.2. При $Q = y^{2}$ среди уравнений класса $y''' = \lambda r^{1/2}E^{7/2}y^{-5/2}$ существует 2 (и только 2) вида уравнений (см. таблицу 6), первые интегралы которых наследуют допускаемую самими уравнениями группу Ли с оператором (5.1), причём в этих операторах $\alpha = 0$.

Таблица 6

Уравнение	Первый интеграл P	Наследуемый оператор X
$y'''=\lambda xy^{-5/2}$	$\left(yy''-\frac{1}{2}y'^{2}\right)^{2}+2\lambda\dfrac{2y-xy'}{y^{1/2}}+C$	$X_1=x^{2}\partial_x+2xy\partial_y$
$y'''=\lambda y^{-5/2}$	$\left(yy''-\frac{1}{2}y'^{2}\right)^{2}-2\lambda y'y^{-1/2}+C$	$X_1=\partial_x$

Теорема 5.3. При $Q = y^{2} + D(x)$ (где $D = k^{-2}r^{2}$) оба вида уравнений класса $y''' = \lambda r^{1/2}(k^{2}y^{2} + r^{2})^{-5/4}$ — уравнения (4.33) $y''' = \lambda x(k^{2}y^{2} + x^{4})^{-5/4}$ и уравнения (4.36) $y''' = \lambda(k^{2}y^{2} + 1)^{-5/4}$ — имеют первые интегралы (4.34)

$$P=\left(yy''-\tfrac{1}{2}y'^{2}\right)^{2}+k^{-2}\left[(2y-2xy'+x^{2}y'')^{2}+2\lambda(2y-xy')(k^{2}y^{2}+x^{4})^{-1/4}\right]+C$$

и (4.37) $P=\left(yy''-\frac{1}{2}y'^{2}\right)^{2}+k^{-2}\left[y''^{2}-2\lambda(k^{2}y^{2}+1)^{-1/4}y'\right]+C$ соответственно, которые наследует допускаемую самими уравнениями группу Ли с операторами (4.35) $X = x^{2}\partial_x + 2xy\partial_y$ и (4.38) $X = \partial_x$ соответственно.

Теорема 5.4. При $Q = b(x)y$ среди уравнений класса $y''' = \lambda r^{-3/4} E^{9/4} y^{-5/4}$ существует 2 (и только 2) вида уравнений, первые интегралы которых наследуют допускаемую самим уравнением группу Ли с оператором (5.1):

Таблица 7

Уравнение	Первый интеграл P	Наследуемый оператор Х
$y''' = \lambda y^{-5/4}$	$P_1 = y''\left(y''y - \frac{1}{2}y'^2\right) - 2\lambda y^{-1/4} y' + C$	$\mathrm{X}_1 = 3x\partial_x + 4y\partial_y$, $\mathrm{X}_2 = \partial_x$
$y''' = \lambda x^{-3/2} y^{-5/4}$	$P_1 = (x^2 y'' - 2xy' + 2y)\left(y''y - \frac{1}{2}y'^2\right) + 2\lambda(2x^{-1/2}y^{3/4} - x^{1/2}y^{-1/4}y') + C$	$\mathrm{X}_1 = 3x\partial_x + 2y\partial_y$, $\mathrm{X}_2 = x^2\partial_x + 2xy\partial_y$

Из теорем 5.1–5.4 следует, что „наследование“ точечных симметрий первыми интегралами уравнений 3-го порядка оказывается не таким уж редким явлением, как можно было ожидать.

В **третьей главе** (состоящей из двух параграфов) рассматривается решение обратной задачи группового анализа уравнений 3-го порядка без предстаршей производной, допускающих нелокальную симметрию с оператором, имеющим экспоненциальную структуру.

Сначала, в **§ 6**, вводятся определения канонической формы оператора (0.4) и канонического ЭНО, формулируются их основные свойства и выводится развёрнутая форма определяющего уравнения для канонического ЭНО уравнения 3-го порядка.

Определение 6.2. Оператор

$$\hat{\mathrm{X}} = \eta(x, y, y') e^{\int \zeta(x,y,y')\,dx} \partial_y \tag{6.3}$$

(в котором $\eta(x, y, y')$ и $\zeta(x, y, y')$ — гладкие функции) будем называть ***каноническим ЭНО*** (1-го порядка).

Затем в **§ 7** рассматривается вопрос о структуре уравнений без предстаршей производной, априори допускающих группу Ли с каноническим ЭНО (6.3).

Лемма 7.1. ОДУ 3-го порядка вида $y''' = f(x, y, y')$ допускает нелокальную симметрию с оператором (6.3), если и только если функция

$$\eta(x,y,y') \equiv a(x,y)y'^2 + b(x,y)y' + c(x,y), \tag{7.2}$$

а функция

$$\zeta \equiv \begin{cases} A(x, y)y' + B(x, y) & \text{при} \quad \eta_{y'} \equiv 0, \\ A(x, y)\eta^{-2} + B(x, y) - b_y b^{-2}\eta & \text{при} \quad \eta_{y'} \not\equiv 0, \quad \eta_{y'y'} \equiv 0, \\ \dfrac{A(x, y)}{\eta} + \dfrac{B(x, y)}{\eta^{3/2}} + \dfrac{a_y b}{4a^2} - \dfrac{a_y y' + 2a_x + b_y}{2a} & \text{при} \quad \eta_{y'y'} \not\equiv 0, \quad \Delta \equiv 0, \\ \dfrac{A(x, y)\eta_y}{2a^{1/2}\eta^2} + \dfrac{B(x, y)(\eta - 2\Delta)}{\Delta^{1/2}\eta^2} + \\ \quad + \dfrac{1}{2\eta^2}\left[\left(\frac{2a_x + b_y}{a} - \frac{a_y b}{a^2}\right)(8\Delta^2 - 4\Delta\eta - \eta^2) - \frac{a_y}{2a^2}\eta_{y'}(8\Delta^2 + \eta^2)\right] & \text{при} \quad \eta_{y'y'}\Delta \not\equiv 0, \end{cases} \tag{7.3}$$

(здесь $\Delta = \Delta(x, y) \equiv (4ac\text{–}b^2)/4a$). При этом функции $f(x,y,y')$, $a(x,y)$, $b(x,y)$, $A(x,y)$, $B(x,y)$ связаны уравнениями

$$G(x,y,y') - \eta_{y'} f_{y'} + 3\eta_{y'y'} f = 0,$$

$$Q(x,y,y') + \eta_{y'} f_x - \eta f_y - (\eta\zeta + \eta_x + \eta_y y') f_{y'} + [\eta\zeta_{y'} + \eta_y + 3(\eta_{y'}\zeta + \eta_{xy'} + \eta_{yy'} y')] f = 0,$$

где

$$G(x,y,y') \equiv \eta(\zeta_y + 2\zeta_{xy'}) + 3[\eta\zeta\zeta_{y'} + \eta_{y'}\zeta^2 + \eta_{y'}\zeta_x + \eta_x\zeta_{y'} + (\eta_y + 2\eta_{xy'})\zeta + \eta_{xy} + \eta_{xxy'}] +$$
$$+ [2\eta\zeta_{yy'} + 3(\eta_y\zeta_{y'} + \eta_{y'}\zeta_y + 2\eta_{yy'}\zeta + \eta_{yy} + 2\eta_{xyy'})]y' + \eta_{yyy'} y'^2, \qquad (7.6)$$

а $\quad Q(x, y, y') \equiv \eta(\zeta^3 + 3\zeta\zeta_x + \zeta_{xx}) + 3\eta_x(\zeta^2 + \zeta_x) + 3\eta_{xx}\zeta + \eta_{xxx} +$

$$+\{2\eta\zeta_{xy} + 3[\eta\zeta\zeta_y + \eta_y(\zeta^2 + \zeta_x) + \eta_x\zeta_y + 2\eta_{xy}\zeta + \eta_{xxy}]\}y' +$$
$$+ [\eta\zeta_{yy} + 3(\eta_y\zeta_y + \eta_{yy}\zeta + \eta_{xyy})]y'^2 + \eta_{yyy} y'^3.$$

Теорема 7.1. ОДУ 3-го порядка без предстаршей производной вида $y''' = f(x, y, y')$ допускает канонический ЭНО (6.3), в котором $\eta_{y'} \ne 0$, если и только если функции η, ζ и f удовлетворяют условиям леммы 7.1 и функция f имеет вид:

$$f(x,y,y') \equiv \begin{cases} \Phi(x,y) + \int G(x,y,y')\eta_{y'}^{-1}dy' & \text{при} \quad \eta_{y'y'} \equiv 0, \\ \eta_{y'}^3\left(\Phi(x,y) + \int G(x,y,y')\eta_{y'}^{-4}dy'\right) & \text{при} \quad \eta_{y'y'} \not\equiv 0, \end{cases} \qquad (7.12)$$

где $\Phi(x,y)$ — произвольная функция своих аргументов, а функция G определяется формулой (7.6).

Теорема 7.3. ОДУ 3-го порядка вида $y''' = f(x, y, y')$ допускает нелокальную симметрию с оператором (6.3), в котором $\eta_{y'} \equiv 0$, если и только если этот оператор имеет вид $\hat{X} = \alpha^{-1}(\alpha y + \beta)e^{D_x^{-1}\left[\gamma(\alpha y+\beta)^{-3}\right]}\partial_y$, а функция f определяется формулой

$$f(x,y,y') \equiv (\alpha y + \beta)\Phi(x,u) - \frac{\alpha\gamma}{\alpha y + \beta}u^2 - \frac{3(\alpha'\gamma - \alpha\gamma')(\alpha y + \beta)^3 - 4\alpha\gamma^2}{3\alpha(\alpha y + \beta)^4}u +$$
$$+\frac{(6\alpha\alpha'\alpha'' - 2\alpha'^3 - \alpha^2\alpha''')y + 3\alpha\alpha'\beta'' + 3(\alpha\alpha'' - 2\alpha'^2)\beta' - \alpha^2\beta'''}{\alpha^3}(\alpha y + \beta) -$$
$$-\frac{3(2\alpha'^2 - \alpha\alpha'')\gamma - 3\alpha\alpha'\gamma' + \alpha^2\gamma''}{3\alpha^3(\alpha y + \beta)} + \frac{2\gamma(\alpha'\gamma - \alpha\gamma')}{3\alpha^2(\alpha y + \beta)^4} - \frac{10\gamma^3}{27\alpha(\alpha y + \beta)^7}, \qquad (7.24)$$

где $\Phi(x,u)$, $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$ — произвольные функции указанных аргументов ($\alpha \ne 0$), а инвариант $u = \dfrac{y'}{\alpha y + \beta} + \dfrac{\alpha' y + \beta'}{\alpha(\alpha y + \beta)} + \dfrac{\gamma}{3\alpha(\alpha y + \beta)^3}$.

Исследование нелокальных симметрий, таким образом, даёт нам ещё несколько (существенно отличных от найденных в главе 1) классов уравнений, обладающих непрерывными симметриями. В частности, если в уравнении вида $y''' = f(x, y, y')$ с правой частью (7.24) функция $\Phi(x,u)$ является алгебраической, то мы имеем принципиально новый вид уравнений 3-го порядка с рациональной правой частью, обладающих нетривиальной симметрией.

В **заключении** диссертации подводятся итоги и формулируются основные результаты.

В **приложение** вынесено доказательство теоремы 4.3, поскольку оно принципиально не отличается от доказательства теорем 4.1–4.2 и помещение его в основной текст диссертации перегрузило бы его излишними подробностями.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. *Аврашков П.П.* Лиевские симметрии и первые интегралы одного класса дифференциальных уравнений / Аврашков П.П., Зайцев В.Ф. // Сборник научных трудов, том 8, –Орел: ОрелГТУ, 1996. С.44–49.
2. *Аврашков П.П.* Об одном алгоритме третьего поколения поиска первых интегралов одного класса дифференциальных уравнений. / Сборник научных трудов, том 8, –Орел: ОрелГТУ, 1996. С.50–53.
3. *Аврашков П.П.* О нелокальных симметриях одного класса дифференциальных уравнений 3-го порядка. Тезисы доклада. / Алгебраические и аналитические методы в теории дифференциальных уравнений: Сборник трудов международной конференции. –ОГУ –Орёл, 1996. С.58–59.
4. *Аврашков П.П.* О дифференциальных уравнениях 3-го порядка, допускающих двумерную алгебру Ли. / Аврашков П.П., Зайцев В.Ф. // Сборник научных трудов, том 13, –Орел: ОрелГТУ, 1998. С.8–14.
5. *Аврашков П.П.* Структура ОДУ 3-го порядка, обладающих линейным по y'' первым интегралом. / Известия ОрелГТУ. Математика. Механика. Информатика. –Орел: ОрелГТУ, 2000. – № 3. С.5–7.
6. *Аврашков П.П.* О дифференциальных уравнениях 3-го порядка, обладающих лиевскими симметриями и первыми интегралами / Аврашков П.П., Зайцев В.Ф. // "Дифференциальные уравнения и процессы управления", No.4, 2003, С.1–25. – Эл.ж. Рег.н.: П23275 от 07.03.1997. – http://www.neva.ru/journal.

Подписано к печати 30 апреля 2004
Объем 1 печ. л. Тираж 70 экз. Заказ №

Отпечатано в типографии ОрелГТУ
302020, г. Орёл, ул. Московская, 65